RIVISTA INTERNAZIONALE DI FILOSOFIA E PSICOLOGIA
DOI: 10.4453/rifp.2013.0025
ISSN 2039-4667; E-ISSN 2239-2629
Vol. 4 (2013), n. 2, pp. 246-248

Recensioni

Ian Stewart
Domare l'infinito. Storia della matematica dagli inizi alla teoria del caos
Traduzione di Angela Iorio
Bollati Boringhieri, Torino 2011
Pagine 376; € 32,00

Il linguaggio argomentativo, la scrittura, la notazione numerica sono tre invenzioni che caratterizzano in modo determinante l'*Homo Sapiens*. È certo che «senza i numeri, la civiltà come oggi la conosciamo non potrebbe esistere» (p. 16). Il sistema numerico che utilizziamo ogni giorno ci è talmente familiare da considerarlo un dato quasi naturale ma non è così.

I modi per indicare i numeri possono essere e sono stati assai diversi. Le cifre che chiamiamo "arabe" provengono in realtà dall'India e vennero introdotte in Europa soltanto nel XIII secolo da Fibonacci. L'aritmetica che i bambini imparano sin dai primi anni di vita e la potenza computazionale dei grandi server sono il frutto di una storia millenaria, complessa e anche contraddittoria.

La matematica è un'impresa collettiva. È un sapere unitario e insieme molteplice, composto di aritmetica, algebra, analisi, geometria e molti altri ambiti i cui confini sono sempre dinamici, cangianti, intersecati. Dopo il grande inizio babilonese, i Greci sistematizzarono la geometria e imposero ai calcoli «l'uso sistematico della deduzione logica allo scopo di garantire che quanto enunciato potesse anche essere giustificato» (p. 52).

E tuttavia, cosa sono i *numeri*? Questa è una domanda molto più complessa di quanto appaia e non è casuale che una *definizione* sia mancata per secoli, preferendo la scoperta e l'utilizzo delle *proprietà* dei numeri. I numeri servono a contare degli oggetti ma essi non sono oggetti.

I numeri sono entità astratte ma le loro applicazioni intessono la nostra vita quotidiana e la determinano. I numeri sono costruzioni mentali che hanno però tutta l'aria di poter continuare ad aver senso anche se non ci fossero più da nessuna parte delle menti in grado di pensarli. I numeri non sono empirici, non hanno volume, spessore, percepibilità. Eppure ci sono. I numeri sono l'esempio forse più chiaro di enti che consistono (*bestehen*) senza esistere (*existieren*), per dirla con Meinong.

I tipi principali di numeri sono i *naturali* – che sono la sequenza infinita 1,2,3,...; gli *interi*, che comprendono i naturali, la loro immagine speculare cioè i numeri negativi, e lo zero; i *razionali* – frazioni positive e negative, con numeratore e denominatore intero; i *reali* – decimali positivi o negativi, capaci di procedere all'infinito – che comprendono anche gli irrazionali, come π. Quest'ultimo (il famoso "3,14", che esprime il rapporto fra il perimetro della circonferenza e il suo diametro) è uno di quei numeri che fondano la matematica/geometria e la sua potenza.

Altri due numeri fondamentali sono e (uguale a circa 2,7128) e $\sqrt{-1}$. Il primo è la base naturale per i logaritmi, il secondo sembra un numero poco sensato che viene introdotto «partendo dall'equazione quadratica $x2+1=0$, la cui soluzione è la radice quadrata di meno uno, qualunque cosa significhi» (p. 178).

Fu molto tardi che si cercò di dare una fondazione assiomatica ai numeri. Lo fece Giuseppe Peano (nel 1889) con il suo elenco di assiomi per i numeri naturali: «esiste un numero 0; ogni numero n ha un successore, $s(n)$ (che pensiamo come $n+1$); se $P(n)$ è una proprietà dei numeri, tale che $P(0)$ è vera, e ogni volta che $P(n)$ è vera allora $P(s(n))$ è vera, allora $P(n)$ è vera per ogni n (principio dell'induzione matematica)» (p. 304).

Ma ben al di là del numero in quanto tale, la matematica contemporanea studia strutture, forme, configurazioni. E in questo modo mostra di continuo e con le più diverse applicazioni la potenza della mente umana.

Tra le più importanti invenzioni e scoperte della matematica si possono ricordare la distinzione tra numeri *primi* e numeri *composti*; il *piano cartesiano*, capace di coniugare in modo estremamente elegante ed efficace i numeri e lo spazio; le funzioni $f(x)$, formule capaci di calcolare a partire da un certo numero un altro numero associato al primo; il calcolo infinitesimale (*differenziale* e *integrale*), che è «la matematica delle velocità istantanee di variazione» (p. 139); la *flussione* newtoniana, associata al calcolo infinitesimale «per esprimere il concetto fondamentale, quello di una quantità che fluisce verso lo zero ma non assume mai questo valore» (p. 154); le leggi logiche e antipsicologistiche del pensiero individuate da George Boole, con i suoi operatori NOT, AND e OR: «se un enunciato S è vero, allora NOT S è falso, e viceversa. S AND T è vero se, e soltanto se, sia S che T sono veri. S OR T è vero a condizione che almeno uno tra S e T sia vero, e anche entrambi» (p. 253); la *topologia*, che nel rispondere a una domanda all'apparenza semplice quale "che forma ha questa cosa?" apre alle geometrie non euclidee e a una trasformazione radicale nella comprensione dello spaziotempo, a proposito del quale «Minkowski comprese che le tre coordinate dello spazio ordinario, unite a una coordinata aggiuntiva per il tempo, formano uno *spazio-tempo* a quattro dimensioni. Ogni punto nello spazio-tempo è chiamato *evento*: si tratta di una particella che brilla alla vita soltanto un istante nel tempo e poi finisce» (p. 294).

È proprio il concetto di *dimensione* l'argomento filosoficamente più stimolante della matematica contemporanea. Si tratta infatti di un concetto che non è da intendere fisicamente, pena il non poter neppure pensarlo, ma da comprendere nella sua natura del tutto concettuale. La questione *matematica* dell'esistenza di uno spazio a quattro o più dimensioni non deve essere confusa con il problema empirico se possa esistere uno spazio *fisico* con quattro dimensioni. Ancor meno deve essere confusa con la questione se possano darsi quattro o più dimensioni all'interno dello spazio fisico *conosciuto*.

La risposta a quest'ultima domanda è infatti chiaramente negativa. In matematica la dimensione ha a che fare con la topologia e quindi con le *configurazioni* di un oggetto. L'esempio proposto da Stewart è assai chiaro: «occorrono sei coordinate generalizzate per specificare la configurazione di una bicicletta rudimentale: una per l'angolo relativo tra il manubrio e il telaio, una ciascuna per le posizioni angolari delle due ruote, un'altra per l'asse dei pedali, due ancora per le dimensioni di rotazione degli stessi pedali. Una bicicletta è, ovviamente, un *oggetto* tridimensionale – ma lo spazio delle possibili *configurazioni* della bicicletta è a sei dimensioni, che è una delle ragioni per cui imparare ad andare in bicicletta è difficile sino a che non si acquisisce la pratica. Il nostro cervello deve costruire una rappresentazione interna della maniera in cui interagiscono queste sei variabili: dobbiamo imparare a navigare nella geometria a sei dimensioni dello spazio-bicicletta. Per una bicicletta in movimento, dobbiamo anche tener conto di sei velocità corrispondenti: la dinamica è, nella sostanza, a *dodici* dimensioni» (p. 295).

Si arriva così alla questione fondamentale della relazione tra la matematica e ciò che definiamo *realtà*, dalla quale discende la domanda essenziale sul rapporto tra matematica e *verità*. «Gran parte della matematica non ha alcuna relazione ovvia con la realtà, ma è utile comunque» (p. 220).

In questa singolare convergenza di autonomia e utilità sta la ragione dell'indifferenza della matematica alla natura dello spazio reale. Una situazione che rende la geometria multidimensionale qualcosa di drammaticamente lontano da qualunque esperienza empirica. Ma «l'errore è aspettarsi che la matematica sia una traduzione ovvia e letterale della realtà, osservata nel modo più diretto» (p. 298). Per i matematici, invece, qualcosa esiste se è *logicamente* non contraddittorio.

Che possa risultare contraddittorio con la struttura empirica del mondo è del tutto irrilevante: «in questo senso, gli spazi multidimensionali sono reali tanto quanto il consueto spazio a tre dimensioni, perché è altrettanto semplice fornire una definizione formale» (p. 292). In matematica non esistono dunque *verità* che si riferiscano al mondo reale ma *dimostrazioni* che si riferiscono al mondo logico.

Una differenza che è stata resa particolarmente evidente da quello che sembra ormai essere diventato una sorta di star della logica: il teorema di incompletezza di Kurt Gödel, il quale «dimostrò che se la matematica è coerente in termini logici, allora è impossibile dimostrarlo» (p. 318). Si tratta di una *indecibilità* simile a quella di chi dicesse "Questa affermazione è una bugia".

Contrariamente a quanto si potrebbe dedurne, la bellezza e la potenza delle matematiche vengono da questo teorema rafforzate. La libertà pressoché completa dal mondo empirico crea infatti un ambito nel quale le facoltà della mente umana possono esplicarsi tenendo conto soltanto di se stesse. Anche se i risultati di queste elaborazioni autonome incidono poi in modi quasi sempre efficaci sugli strumenti umani, una situazione così complessa dovrebbe comunque rendere prudenti ed evitare di enunciare giudizi secondo i quali la descrizione matematica della realtà fisica sia «la via più nota e più efficace per l'umanità di comprendere il mondo naturale» (p. 138).

Il linguaggio matematico è infatti uno dei possibili linguaggi con i quali la mente getta sulla materia la propria rete nel tentativo di catturarne i significati. Lo stesso Stewart riconosce che «è meglio essere consapevoli dei nostri limiti piuttosto che vivere nel paradiso degli stolti» (p. 321).

Un esempio tra i più profondi della bellezza formale e mentalistica della matematica è costituito dai teoremi di George Cantor sui numeri *transfiniti*, i quali dimostrano che possono esistere infiniti di diverse dimensioni. Se con *cardinalità* di un insieme intendiamo il numero di membri di quell'insieme e con il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) ci riferiamo alla cardinalità dell'insieme di tutti i numeri interi, allora un insieme più piccolo – come l'insieme dei numeri pari o dei numeri dispari – può avere la stessa cardinalità di uno più grande, ed entrambi possono essere – come sono in questo caso – infiniti: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Non solo: con un altro e più complesso teorema riferito all'insieme dei numeri reali, Cantor dimostrò anche che «un infinito può essere più grande di un altro infinito» (p. 313).

E tuttavia l'invenzione più grande della matematica è forse anche la più semplice. È il numero 0, che rappresenta un insieme vuoto capace di moltiplicare tutto il resto. È la *differenza* necessaria affinché l'*identità* dei numeri abbia senso.

Alberto Giovanni Biuso